

機械工学実験の新しい試み —紙の引張強度に及ぼす欠陥形状の影響—*

小田原 悟**, 福田 孝之**

Effects of Defect Shape on the Tensile Strength of Papers

Satoru Odahara and Takayuki Fukuda

1. 緒 言

わが国では昨今の理科離れ対策として全国的に小・中学生向けの実験や工作遊びが多く企画されている^{(1), (2)}。そのなかで使用される材料として種々の材質の「紙」がある。紙は引っ張られるとちぎれたり破れる。紙に穴や疵が入ると小さい力が作用しても破れてしまう。紙を用いたものづくりを楽しく行うには紙の強度を一通り知っておく必要がある。

本研究ではこのような紙の強度について力学的考察を行い、強度指針と設計計算法を定量的に示すことができるかを機械工学実験を通して学生に検討させた。

佐世保高専ではブリッジコンテスト⁽³⁾などのような創作実習を低学年次から技術者教育の導入として行っている。高専の工学教育では理屈を詰め込む前に、まずは”もの”に触れて創造性を身につけることが重要とされている。

実験は本校5年生の機械工学実験の材料力学実験のテーマの一つ「応力集中係数と応力拡大係数の実験」として行う。学生7~8人ずつ5班に分けて毎週異なる条件で実験をさせた。独自に考案して製作した簡易引張実験器を用いてA4サイズの再生紙・上質紙・トレース紙を破断させ、紙が破断したときの荷重を読み取る。紙には種々の形状や寸法の穴、き裂を導入した。穴やき裂の形状を定量的に捉えて紙の強度を評価する。穴やき裂などの欠陥を含んだ紙の強度指針が得られれば、紙を用いた工作や実験に役立つことが期待で

きる。学生はどのようにすれば精度よく穴やき裂を導入できるか、あるいは荷重をうまく負荷できるかを試行錯誤した。

また、学生はこの機械工学実験を通して身近にあるものの強度を知るために材料力学⁽⁴⁾・弾性力学⁽⁵⁾の知識を応用する能力を身につけた。

2. 実験装置

図1に紙の引張実験器の模式図を示す。紙の大きさはA4サイズ 210×297 [mm]である。荷重は最大 490 [N]まで計測可能である。紙を挟んだ角棒をクランプ2個でさらに挟んで荷重を負荷した。定規やコンパス、カッターを使って円形、楕円形の穴やき裂を紙の中央に導入した。正確な楕円形を描くのは困難であるので、図1の楕円孔のA点での曲率半径が理想的楕円形のものと合うよう

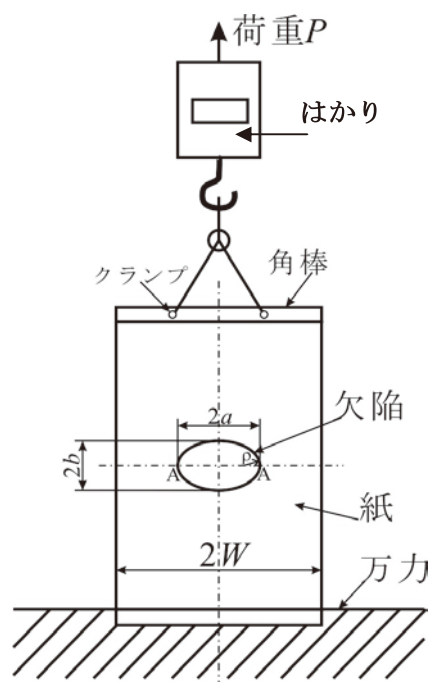


図1 紙の引張実験器

* 原稿受付 平成19年9月28日

** 佐世保工業高等専門学校 機械工学科

に近似的な形状のものを導入した．サンブナンの原理⁽⁵⁾によると荷重負荷点から穴などの欠陥までの距離が紙の横幅 $2W$ 程度でなければ，欠陥位置での公称応力分布は一樣にはならない．しかし，今回は A4 サイズの用紙の形状のままで実験を行った．

また，荷重は学生が背筋力測定的要領で人力で加える．ただし，急に衝撃力を加えないように鉛直上側にゆっくりと力を増加させるようにした．

3. 実験結果

3.1 応力集中に関する実験

3.1.1 平滑紙 まず，紙に穴やき裂がない平滑紙の引張試験をした．紙の幅 $2W$ は $2W=210[\text{mm}]$ ，厚さ B は $B=0.3[\text{mm}]$ (トレース紙)， $0.7[\text{mm}]$ (再生紙)， $0.8[\text{mm}]$ (上質紙)である．断面積 $A=2WB$ の紙に荷重 $P[\text{N}]$ が負荷されたときの応力 σ は $\sigma=P/(2WB)$ [MPa] と表される．

紙に引張荷重を負荷しない初期の荷重 P_0 は固定器具などの重量により $P_0=8.3[\text{N}]$ であった．破断時の計測器の読み取り荷重を P' とし，破断したときの限界荷重を P_{cr} とする．” P_{cr} ” の添え字 **cr** とは” Critical ” 「限界の」 のことである． $P_{cr}=P'-P_0$ である．紙に欠陥がない平滑紙の P_{cr} の平均値は 3 種の紙それぞれ $P_{cr}=220$ [N] (トレース紙)， $360[\text{N}]$ (再生紙)， 480 [N] (上質紙) であった．

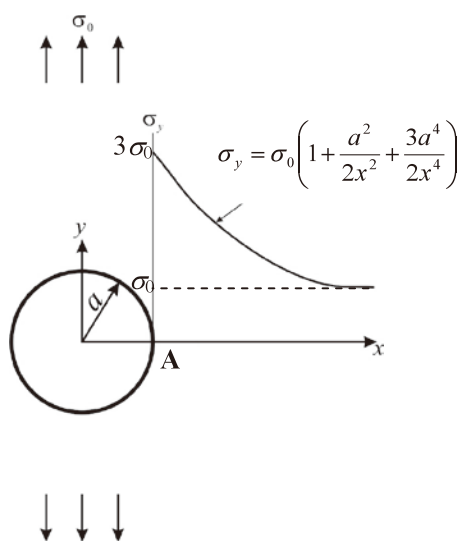


図 2 円孔周りの応力分布

3.1.2 円孔 紙の中央に円形の穴(以下，円孔と呼ぶ)をあける．引張荷重を受ける平面の穴のまわりの応力場の解析について以下に述べる．

1898 年ドイツの G. Kirsch⁽⁶⁾ は図 2 に示すように穴から十分遠方で一樣な応力 σ_0 が y 軸方向に作用する無限平板に存在する円孔周りの応力分布をエアリーの応力関数を用いて解いた．ただし，円孔の直径 $2a$ は板の辺の長さと比較して十分小さいとみなす．G. Kirsch の解によると，半径 a の円孔周りの応力分布は次式で与えられる．

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{2x^2} + \frac{3a^4}{2x^4} \right) \quad (1)$$

厳密には前節で述べたように，穴の位置での公称応力は x 軸に沿って一樣ではないが，以下の考察では荷重負荷点，すなわちクランプで角棒を挟んだ位置での応力が一樣であるとみなして議論している．

円孔縁 A 点，すなわち座標 $(x, y)=(a, 0)$ での y 軸方向応力は $\sigma_A=3\sigma_0$ となる．無限遠方での一樣応力 σ_0 の 3 倍の応力が計算上は円孔縁 A 点に作用している．このことは力学的には以下のように説明される．穴の中は空洞なので応力を受け持たない．穴に材料がないことによる影響が穴の周りに及ぼされて，図 2 に示すように x 軸に沿って変化する．

表 1 円孔及び楕円孔の引張実験結果

材質	σ_{cr0} MPa	$2a$ mm	$2b$ mm	σ_{cr} MPa	a/b -	ρ mm	K_t -	σ_{max} MPa	X mm ⁻¹	$\sigma_{max}/\sigma_{cr0}$ -
再生紙	25.9	30	30	15	1	15	3.0	45	0.156	1.75
		30	15	11	2	3.75	5.0	53	0.587	2.04
		30	11	7	2.73	2.02	6.5	44	1.069	0.95
再生紙	22.2	40	40	10	1	20	3.0	31	0.117	1.40
		40	20	8	2	5	5.0	40	0.440	1.79
		40	10	7	4	1.25	9.0	66	1.689	2.96
再生紙	22.6	60	60	14	1	30	3.0	42	0.078	1.86
		60	42	13	1.43	14.7	3.9	51	0.154	2.23
		60	34	12	1.76	9.63	4.5	54	0.231	2.38
再生紙	32.8	60	60	16	1	30	3.0	49	0.078	1.48
		60	35	15	1.73	9.98	4.5	66	0.223	2.02
		60	19	14	3.16	3.01	7.3	103	0.710	3.13
上質紙	27.5	40	40	20	1	20	3.0	59	0.117	2.14
		40	28	19	1.41	10	3.8	71	0.226	2.59
		40	20	17	2	5	5.0	86	0.440	3.13
トレース紙	51.8	20	20	34	1	10	3.0	102	0.233	1.97
		20	14	33	1.41	5	3.8	126	0.452	2.43
		20	11	31	1.83	2.99	4.7	142	0.740	2.74
トレース紙	89.4	40	40	44	1	20	3.0	131	0.117	1.47
		40	20	32	2	5	5.0	162	0.440	1.81
		40	16	27	2.58	3	6.2	168	0.720	1.88

る応力分布となる．特に， $\sigma_t=3\sigma_0$ の 3 を”応力集中係数は $K_t=3$ である”と表現する．後に述べるように，楕円孔の場合，長半径と短半径の比によって K_t は様々に変化する．

表 1 に 1 つのグループが行った実験によって得られた測定値を示す．表 1 によると，平滑紙の $\sigma_{cr,0}$ に比べて穴がある場合の σ_{cr} は応力集中の影響で小さい値となっていることが分かる．

3. 1. 3 楕円孔 図 1 に示すように長径 $2a$ ，短径 $2b$ の楕円孔のあいた無限板を一様な応力 σ_0 で引張るときの応力集中係数 K_t [—] は次式⁽⁶⁾で表わされる．

$$K_t = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (2)$$

また， K_t は楕円孔半幅 t と楕円孔縁 A 点の曲率半径 ρ で以下の式でも表される⁽⁴⁾．

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{\rho}} \quad (3)$$

ただし， $t=a$ ， $\rho=b^2/a$ である．円孔の場合は $a/b=1$ のときに相当し， $K_t=1+2 \times 1=3$ となる．

表 1 に示すように，実験によって種々の形状の楕円孔に対する K_t が計算される．同じ $2a$ で比べると楕円孔の場合の σ_{cr} は円孔の場合の σ_{cr} よりも小さい傾向にある．また，同じ長径 $2a$ で短径 $2b$ が小さくなるほど，すなわち楕円が y 軸方向につぶれた形になるほど K_t が大きくなり P_{cr} は小さくなる傾向がある．このことが，応力集中の問題の重要な点である．いいかえれば，安全な機械構造部材を設計するには，急に形状が変化する段付部や鋭い切欠き部をなくして，応力集中係数を小さくすることが重要である．

3. 1. 4 切欠き効果 表 1 に示すように，破断したときの切欠き底の応力 $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{cr}$ に注目して円孔，楕円孔の場合の引張破断強度を整理した．ここで，以下の仮説をたてる．

「紙の材質が同じならば，穴などの欠陥の形状が変化しても，楕円孔縁の最大応力 σ_{\max} が材料固有の破断抵抗値を超えれば紙が破断に至る．」

すなわち，応力集中を考慮した $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{cr}$ は欠陥形状によらず材質が同じであれば一定値となると予想される．

ところが，表 1 によれば応力集中係数 K_t の増加にともない σ_{\max} が増加する傾向にあり，実験の結果が上記の「仮説」に反している．このことを力学的に考察するために，以下に示すように Siebel ら⁽⁷⁾が提案した「切欠き底での応力勾配 (Stress gradient) X 」に注目する．応力勾配 X [mm^{-1}] とは x 軸上の $x=a$ の点での応力分布の傾きを意味し，以下の式で表される．

$$X = \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial x} \right) \bigg|_{x=a}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} \quad (4)$$

ここで， σ_{\max} とは破断時の円孔縁での最大引張応力である． $x=a$ 点での楕円孔の縁での応力勾配 X は以下の式で表される．

$$X = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{3+4a/b}{1+2a/b} \quad (5)$$

ρ は楕円孔縁の曲率半径で $\rho=b^2/a$ である． X は楕円孔の曲率半径や長径と短径の比によって変化する値である．

図 3 は遠方に一様な応力 σ_0 が作用した板に形状の異なる楕円孔が存在する場合の応力分布の違いを示したものである．横軸に x ，縦軸に y 軸方向の応力 σ_y を切欠き底の最大応力 σ_{\max} で無次元化した値をとり，応力分布を模式的に示している．楕円孔 B の方が応力集中係数 K_t は A よりも大き

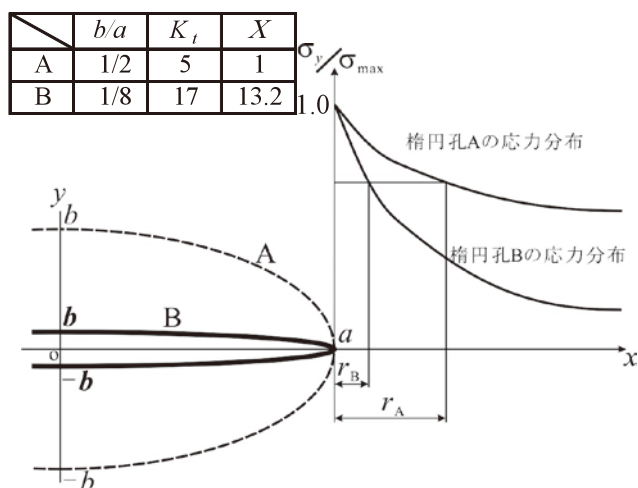


図 3 短軸 b の異なる楕円孔縁近傍の応力分布

い。しかし、楕円 B のように短軸 b が小さくなるほど応力勾配 X が大きい値となる。例えば、図 3 の表に示すように $a=10[\text{mm}]$ のとき楕円孔 A ではおよそ $X=1.0[\text{mm}^{-1}]$ であり、楕円孔 B では $X=13.2[\text{mm}^{-1}]$ となる。そうすると、たとえ、楕円孔縁での最大応力 σ_{\max} が B の方が大きいとしても、楕円孔の形状によって周囲の応力場が変化し、材料が危険にさらされる部分 r_B が狭い領域に限定されるので、楕円孔 B の場合、楕円孔縁形状の鋭さの割には強度の低下は小さい。このことが上記の仮説と実験結果との矛盾を説明付けている。

図 4 に実験から得られた応力勾配 X と $\sigma_{\max}/\sigma_{cr0}$ との関係を示す。○の再生紙と■のトレース紙のばらつきが大きい。3 種とも応力勾配 X が大きくなるにつれて耐えうる応力 σ_{\max} が大きくなる傾向がある。これは、図 3 の楕円孔 B のように応力勾配が大きくなるほど、孔縁で材料固有の抵抗値より応力 σ_y が大きくなる領域 r_B が小さくなるからである。すなわち、扁平な形状の楕円孔の場合、応力集中により危険にさらされる領域がある狭い範囲に限定されるので、応力集中係数 K_t の大きさの割には強度の低下は小さくなるのである。トレース紙、再生紙、上質紙の順に応力勾配 X に対する $\sigma_{\max}/\sigma_{cr0}$ の増加の程度が大きくなる傾向がある。図 4 の傾向は鉄鋼材料などの疲労強度に及ぼす切欠きの効果においても同様である^{(7),(8)}。

したがって、図 4 を用いれば様々な形状の欠陥を含んだ紙の引張破断強度を推定することがで

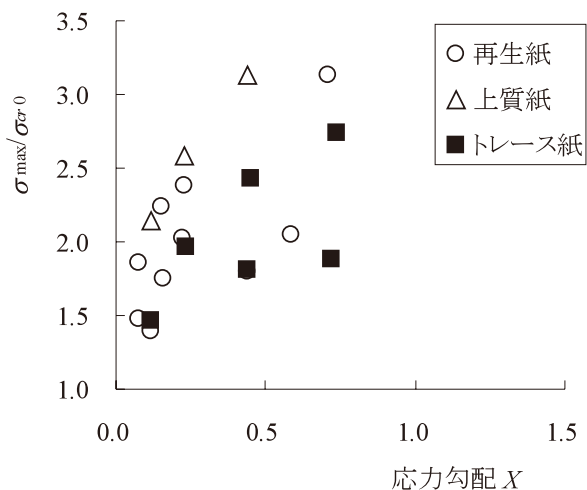


図 4 楕円孔縁が耐えうる最大応力 σ_{\max} と楕円孔縁での応力勾配 X との関係

きる。ただし、この実験の考察では応力集中係数 K_t が紙幅 $2W$ の影響を受けることに関しては無視した。

3. 2 き裂を含む場合

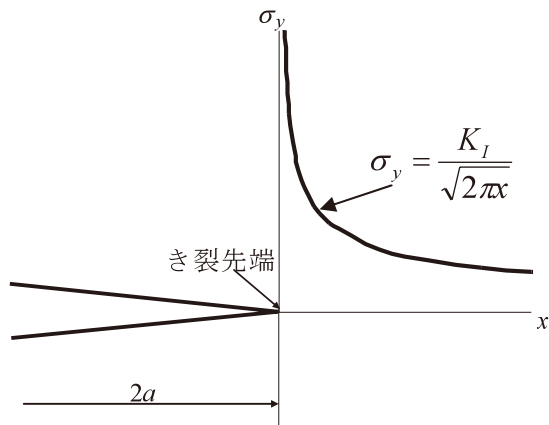
3. 2. 1 設計応力の決定 引張強さ σ_B の材料に孔があるときの許容応力 σ_a を応力集中係数 K_t を考慮して以下のように設定する。許容応力 σ_a とは機械構造物を設計するときの基準の応力である。 σ_a より大きい応力が負荷されると物は壊れる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= K_t \sigma_0 < \sigma_B \\ \sigma_a &= \sigma_0 < \sigma_B / K_t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

σ_0 は孔から十分遠方で部材に作用する一様な応力である。したがって、 σ_a は必ず σ_B より小さい値である。たとえば、「 $\sigma_B = 100[\text{MPa}]$, $a=8[\text{mm}]$, $b=1[\text{mm}]$ の楕円孔を有する板材の許容応力 σ_a を決定せよ。」という問題があったとする。このとき $K_t = 1 + 2 \times 8/1 = 17$ で式 (6) より許容応力 σ_a は $\sigma_a = 100/17 = 5.9[\text{MPa}]$ となる。

次に、「楕円孔の短軸 b を $b \rightarrow 0$ としたときの応力集中係数 K_t 、許容応力 σ_a はどのような値をとるか？」に対してどのように考えるべきか。この場合、 $K_t = 1 + 2 \times a/0 = \infty$ となる。そうすると、許容応力 σ_a は $\sigma_a = \sigma_B / K_t = 100 / \infty = 0$ となる。 $\sigma_a = 0[\text{MPa}]$ なのでき裂のような鋭い欠陥を有する部材に力は加えられないことになる。ただ、実際はそういうことは起こらず、実用金属材料の場合、き裂の先端のある狭い領域で塑性変形が起こって、ある大きさの応力までは部材は持ちこたえる。

3. 2. 2 き裂先端の応力拡大係数 K_I き裂を有する部材の設計許容値を得るために応力拡大係数に着目する。図 5 はき裂先端の極近傍の応力場を表している。図 5 に示すように寸法 $2a$ のき裂を有する無限平板を一様応力 σ_0 で引っ張るときのき裂先端の応力分布 σ_y は、き裂の先端に近づくにつれて大きい値となる。 σ_y は $\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi x}$ と表され⁽⁵⁾、 x が 0 に近づくほど σ_y は無限に大きくなる。 K_I は σ_y と $1/\sqrt{x}$ を関係付ける係数であり、応力拡大係数 $[\text{MPa}\sqrt{\text{m}}]$ と呼ばれ、き裂先端の厳し

図5 き裂先端の応力 σ_y の変化

さを表す物理量である． K_I は遠方の応力 σ_0 [MPa]とき裂の半長 a [m]の関数として次式で表される．

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (7)$$

ここで，たとえ負荷される応力やき裂寸法が異なっても， K_I が同じであればき裂先端の厳しさの程度は同じである⁽⁵⁾．

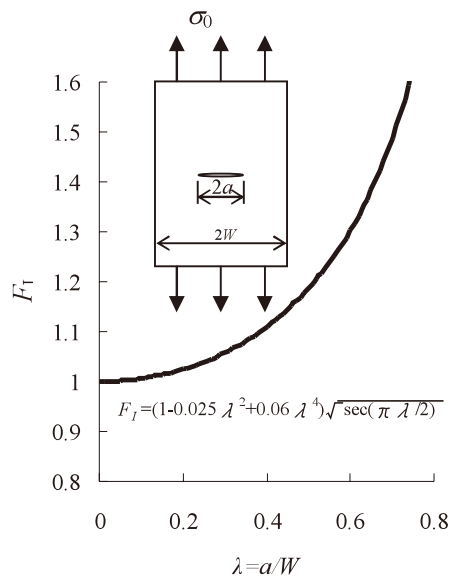
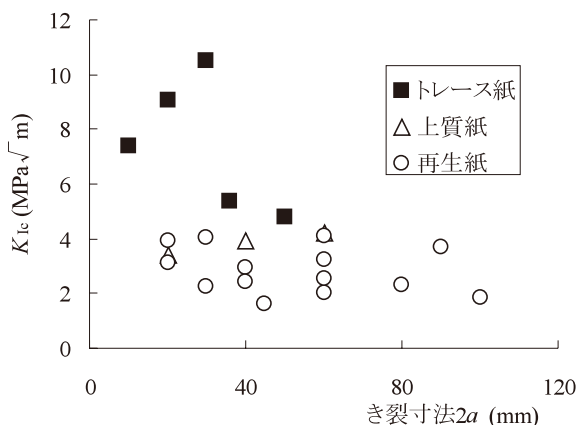
例えば，無限平板遠方の引張応力 σ_0 が $\sigma_0=10$ [MPa]で，き裂寸法 $2a=30$ [mm]のき裂の先端の応力拡大係数 K_I を求めると，

$$K_I = 10 \times \sqrt{\pi \times 15 / 1000} \cong 2.2 [\text{MPa} \sqrt{\text{m}}]$$

となる．

一方，応力拡大係数 K_I は単位が $[\text{MPa} \sqrt{\text{m}}]$ であるのに対し，応力集中係数 K_t には単位はなく無次元の量であることに注意が必要である．本実験の主たる目的は応力集中係数 K_t と応力拡大係数 K_I の違いについて，学生に実験を通して身につけさせることである．

3. 2. 3 紙の破壊靱性値 K_{Ic} 紙の破壊靱性値 K_{Ic} を実験的に測定する．破壊靱性値とはき裂を含む部材の破壊に対する抵抗値のことである．実用材料の破壊靱性試験法については JIS で規定されている⁽⁹⁾．破壊靱性値 K_{Ic} は負荷荷重とき裂の開口量との関係から算出されるものである⁽⁹⁾．本実験では便宜上，破壊靱性値 K_{Ic} は破壊時の限界応力 σ_{cr} と，紙の中央に y 軸に対して垂直に導入されたき裂の寸法 $2a$ を使って，次式のように表されるものとする．

図6 き裂寸法と補正係数 $F_I^{(9)}$ 図7 き裂寸法 $2a$ と破壊靱性値 K_{Ic} との関係

$$K_{Ic} = F_I \sigma_{cr} \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

ここで， F_I :補正係数[-]， σ_{cr} :破壊時の限界応力[MPa]， a :き裂の半長[m]である．図6に示すように補正係数 F_I はき裂寸法 $2a$ と紙の幅 $2W$ との比 $\lambda = a/W$ によって変化する値である． $\lambda = a/W \Rightarrow 0$ のとき，すなわち無限板にき裂が存在するときの式(8)における補正係数 F_I は $F_I=1$ で式(7)と一致する．

図7に本実験で得られたき裂寸法と式(8)及び図6から得られた破壊靱性値 K_{Ic} との関係を示す．横軸にき裂寸法 $2a$ ，縦軸に K_{Ic} の値をとる． K_{Ic} のばらつきの原因は，1)紙をクランプや角棒で挟む際に多少のずれが生じてしまうことで一様な応力が負荷されがたいこと，2)き裂の導入の際に寸法にばらつきが生ずることやカッターでき裂を入

れ始めるときと、切り終わりでき裂先端の状態が異なること、3) 荷重負荷の増加速度が実験者によって異なること、などが考えられる。このことは、図 4 の楕円孔の実験データでも共通していることである。トレース紙がほかの 2 種と比較するとばらつきが大きい、き裂寸法が 10~100[mm]と変化しても再生紙と上質紙の K_{Ic} はほぼ一定の値となっている。平均の破壊靱性値 K_{Ic} は $K_{Ic}=2.86$ (再生紙), 3.58(上質紙), 7.43(トレース紙)[$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$]であった。紙厚がもっとも薄いトレース紙の K_{Ic} の値がもっとも大きいのは興味深い。トレース紙がばらつきは大きい、き裂には鈍感で粘り強い材質であることが本実験の結果から明らかになった。再生紙はき裂に対しては特に弱い性質を持つことが分かった。

因みに、実用材料の破壊靱性値 K_{Ic} を例にとると鋼 14~132 [$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$], アルミニウム合金 24~44 [$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$], チタン合金 55~115 [$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$], セラミックス 2~12 [$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$]である⁽¹⁰⁾。

このように、簡単な器具を用いることで様々な材質の紙の切欠き効果や破壊靱性値のおおよそのオーダーを知ることができた。このことは、紙を用いた工作や理科実験の際の紙の強度指針として参考にできる。

また、卒業研究ではなく学生実験としての機械工学実験の中で工学的に重要な素材の物性値を得ることができた。著者の個人的印象であるが、学生が本実験に取り組む意欲や姿勢が他の一般的な材料試験の場合と比べて良かった。例えば、金属材料の引張試験であれば、実用材料の引張強度などは良く知られているので、実験をしなくても資料からいくらかでも情報を得ることができる。このことは学生も粗方知っている。今まで、まだほとんど定量的な資料として公表されていない紙の強度を測定するということに対して学生が興味を示した。したがって、今後は機械工学実験のテーマとして引張試験など基礎実験の他に、工学的に意味のある、あるいは機械構造物の設計の指針につながるような試験をより多く盛り込ん

でいくことが重要と考える。

また、高専の 5 年生のうち多くの学生が弾性力学⁽⁵⁾の講義のなかで応力集中係数と応力拡大係数を混同してしまいがちであった。著者の印象ではこの実験を通して、この 2 つの物理量の違いを理解できたという学生が多くなったようである。

4. 結 論

機械工学実験の新たなテーマの 1 つとして紙を用いた応力集中の問題に取り組んだ。得られた結論を以下に示す。

- 1) 紙の引張試験をしたところ欠陥がない平滑紙の耐えうる荷重は 220~480[N]であった。
- 2) 紙に穴や楕円孔を導入して引張試験を行った。楕円孔で短軸の小さい扁平な形状のものほど耐えうる荷重は小さい値となった。
- 3) 同じ材料で比較すると欠陥に沿う縁付近の応力勾配が大きいほど耐えうる最大応力 σ_{\max} が大きい値となることが分かった。すなわち、金属材料の疲労強度と同様に Siebel の切欠き効果を説明付けるような結論が得られた。
- 4) 破壊靱性値 K_{Ic} は紙の材質によって異なる値となり、 $K_{Ic}=1.5\sim11.0$ [$\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$]と大きくばらついた。
- 5) 本実験を通して応力集中係数と応力拡大係数の違いを理解できたと感じる学生が多くなった。

謝 辞 この研究報告は平成 17 年度機械工学科 5 年生の機械工学実験のテーマのひとつ「応力集中係数と応力拡大係数実験」の実験結果とレポートの考察を参考にしたものである。平成 17 年度機械工学科 5 年諸君に深く感謝する。

参 考 文 献

- (1) 米村でんじろう：サイエンスプロダクション，URL: <http://www.denjiro.co.jp/>, (2005).
- (2) 森 保仁・原 久之：小学生の先生方を対象とした理科実験講座，佐世保高専研究報告，第 43 号，pp. 57-63, (2007).
- (3) 小田原 悟・藤村 顕世・福田 孝之：創作実習「ブリッジコンテスト」ーダンボールで作った橋の曲げ強度ー，工学・工

機械工学実験の新しい試みー紙の引張強度に及ぼす欠陥形状の影響ー

業教育研究講演会講演論文集, 日本工学教育協会, pp. 162-163, (2005).

- (4) 村上 敬宜 :機械工学入門講座 1 材料力学, 森北出版, (1994).
- (5) 村上 敬宜 : 弾性力学, 養賢堂, pp. 35-37, pp. 59-64, (1985).
- (6) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, Mcgraw-Hill International Editions Engineering Mechanics Series, pp. 90- 97, (1970).
- (7) Siebel E. and Stieler M. : Ungleichformige Spannungsverteilung bei Schwingender Beanspruchung, VDI-Z, 97-5, pp. 121-126, (1955).
- (8) 村上 敬宜 : 金属疲労 微小欠陥と介在物の影響, 養賢堂, pp. 24-27, (1993).
- (9) 日本材料学会編 : 材料強度学, pp. 66- 75, (2005).
- (10) 近藤 良之 : 材料力学特論講義テキスト, p. 41, (2003).

